opg 1 Bewijs met behulp van volledige inductie

1) bewijs dat het klopt voor de kleinste n: $n=0$

$13^0 - 6^0 = 1-1=0$

$\frac{0}{7}=0$ dus het klopt voor $n=0$

2) Neem aan dat het klopt voor $n=k$ laat dan zien dat het klopt voor $n=k+1$

Dus $13^k - 6^k = 7m$ (gesteld) deelbaar door 7 m positief geheel getal $\Rightarrow 13^k = 6^k + 7m$

$13^{k+1} - 6^{k+1} = 13 \cdot 13^k - 6 \cdot 6^k$

$= 13 \cdot (6^k + 7m) - 6 \cdot 6^k = 13 \cdot 6^k - 6 \cdot 6^k + 7m \cdot 13$

$= 7 \cdot 6^k + 7m \cdot 13$

$7 \cdot 6^k$ en $13 \cdot 7m$ beiden deelbaar door 7 $\Rightarrow 13^{k+1} - 6^k$ deelbaar door 7

$\frac{7 \cdot 6^k}{7} = 6^k$

$\frac{7m \cdot 13}{7} = 7m \cdot 13$

Dus de stelling klopt voor $n=0$, $n=k$ en $n=k+1$ en hierdoor klopt de stelling voor elk geheel getal $n \geq 0$

opg 2 bewijs uit het ongerijmde

Stel $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ is wel een rationeel getal (en dus te schrijven als $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{t}{n}$ met t, n geheel en geen enkele factor gemeenschappelijk $n \neq 0$

$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = {}^2\log(3) = \frac{t}{n}$

$2^{{}^2\log(3)} = 2^{\frac{t}{n}} = 3$

$2^t = 3^n$

* 2^t $t>0$ even dan 3^n even; 3^n is oneven (n geheel) dus dit klopt niet
* $2^t = 1$, $t=0$ dan $3^n = 1$ dus $n=0$ dit klopt niet
* 2^t $t<0$ $2^t = \frac{1}{\text{even getal}}$ dan $3^n = \frac{1}{\text{even getal}}$

3^n $n>0$ want t en n geen factor gemeenschappelijk en $n \neq 0$ $3^n \geq 3$ en dus klopt dit ook niet

Voor elke t en n klopt dit niet dus $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ is niet te schrijven als t/n en is dus geen rationeel getal opg 3) $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0 = z^4(z^2+1) + z^2 + 1 = (z^4+1)(z^2+1) = 0$

$(z^4+1) = 0 \lor z^2+1 = 0$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1$

$z = \sqrt{-1} = i$

$z^4 + 1 = 0$

$z^4 = -1$

$z^2 = i = \sqrt{-1}$

$z = \sqrt{i}$

$z = i \quad \lor \quad z = \sqrt{i}$

opg 4 $\lim_{x \to 2} \frac{6}{x} = 3$

voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta = \min\{1, \frac{1}{3}\varepsilon\}$
zodat als $0 < |x-2| < \delta$
dat dan geldt $\left|\frac{6}{x} - 3\right| = \left|\frac{6-3x}{x}\right| \underset{\uparrow}{=} \left|3 \cdot \frac{x-2}{x}\right|$ vanwege absoluutstrepen
$< C \cdot \delta = \varepsilon$

$\left|\frac{3}{x}\right| < C$

stel $\delta = 1$ dan $1 < x < 3$

dan dus $\frac{3}{1} = 3$ en $\frac{3}{3} = 1$

$\left|\frac{3}{x}\right| < 3$

$3 \cdot \delta = \varepsilon$ $\quad \delta = \frac{1}{3}\varepsilon$

~~opg 5 $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{\ln(x)}$~~

~~$a > 0$~~

~~* $\lim_{x \to 0^+} x^a = 0$~~

~~$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$~~

~~$(x^a)'$ en $\frac{1}{x}$~~

~~opg 5 $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^a}} = \frac{\ln(x)}{}$~~

opg 5 $\quad * \; a = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^0 \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$* \; a > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-a}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a} = \infty$$

$(\ln(x))'$ en $\left(\frac{1}{x^a}\right)'$ bestaan

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-a}} \overset{\text{l'hopital}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-a\, x^{-a-1}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{a+1}}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x \cdot x^a}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} \frac{x^a \cdot x}{x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} x^a = 0$$

$* \; a < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = \cancel{\lim_{x \to 0^+} x^a \wedge \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-a}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-a} = \infty$$

$(\ln(x))'$ en $(x^{-a})'$ bestaan

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-a}} \overset{\text{l'hopital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-a \frac{1}{x \cdot x^a}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} x$$

$$\left(x^{-a-1} = x^{-(a+1)} = \frac{1}{x^{a+1}} = \frac{1}{x \cdot x^a} \right.$$

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} x^a = -\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{a} x^a = -\infty$$

6 $f(x) = (\cos(x))^x = e^{\ln((\cos(x))^x)}$ $\qquad \cos(x) > 0$

$= e^{x\ln(\cos(x))}$

$f'(x) = (x\ln(\cos(x)))' \, e^{x\ln(\cos(x))}$

$= \left(\ln(\cos(x)) - \underbrace{\frac{x\sin(x)}{\cos(x)}}_{x\tan(x)}\right)(\cos(x))^x$

$f'(0) = \left(\ln(\cos(0)) - \frac{0\sin(0)}{\cos(0)}\right)(\cos(0))^0$

$= \left(\ln(1) - \frac{0}{1}\right)1^0 = (0-0)\cdot 1 = 0$

$f''(x) = \left(\left(\ln(\cos(x)) - \frac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right)(\cos(x))^x\right)'$

(productregel) $= \left(\ln(\cos(x)) - \frac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + (\cos(x))^x\left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\right)$

$+ (\cos(x))^x\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)(\sin(x) + x\cos(x)) + x\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$

$= \left(\ln(\cos(x)) - \frac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + (\cos(x))^x\left(-\tan(x) - \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}\right)$

$f''(0) = \left(\ln(\cos(0)) - \frac{0\sin(0)}{\cos(0)}\right)^2 + (\cos(0))^0\left(-\tan(0) - \frac{\cos(0)\sin(0)}{\cos^2(0)}\right)$

$= (\ln(1) - 0)^2 + 1^0 \cdot \left(0 - \frac{0}{1^2}\right) = 0$

productregel $f''(x) = ((\ln(\cos(x)) - x\tan(x))(\cos(x))^x)'$

$= (\ln(\cos(x)) - x\tan(x))^2$

$+ (\cos(x))^x\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \tan(x) - x\sec^2(x)\right)$

$f''(0) = (\ln(\cos(0)) - 0\tan(0))^2$

$+ (\cos(0))^0\left(-\frac{\sin(0)}{\cos(0)} - \tan(0) - 0\sec^2(0)\right)$

$= (\ln(1) - 0)^2 + 1^0\left(-\frac{0}{1} - 0 - 0\cdot 1^2\right)$

$= 0$

$f'(0) = 0$ maar $f''(0) = 0$ dus in $x = 0$ heeft de functie geen lokale extreem opg 7 $\int \sin(x)\tan^2(x)\,dx = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx = \int \frac{(1-\cos^2(x))\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

$u = \cos(x)$
$du = -\sin(x)\,dx$

$= -\int \frac{(1-u^2)\,du}{u^2} = -\int \frac{1}{u^2}du + \int 1\,du$

$= --\frac{1}{u} + u + C = \frac{1}{u} + u + C$
$= \frac{1}{\cos(x)} + \cos(x) + C$

opg 8 $\int_0^1 \frac{x^4 - 3x^2}{x^2+1}\,dx$

$x^2+1 \,/\, x^4 - 3x^2 \,\backslash\, x^2 - 4$
$x^4 + x^2$ −
$-4x^2$
$-4x^2 - 4$ −
4

$\int_0^1 \frac{x^4-3x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^2 - 4 + \frac{4}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4\tan^{-1}(x)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 4\cdot 1 + 4\tan^{-1}(1) - (\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 4\cdot 0 + 4\tan^{-1}(0$
$= \frac{1}{3} - 4 + \frac{1}{4}\pi\cdot 4 - (0 - 0 + 0)$
$= -3\frac{2}{3} + \pi$

opg 9 $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot y - \frac{3}{2}\sqrt{x} = (y-1)\,\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$\frac{1}{y-1}\,y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$\int \frac{1}{y-1}dy = \ln|y-1| + C_1$
$\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{1\frac{1}{2}}\,\frac{3}{2}\,x^{1\frac{1}{2}} + C_2 = x\sqrt{x} + C_2$
$\ln|y-1| = x\sqrt{x} + C$ met $C = C_2 - C_1$
$y - 1 = \pm e^{x\sqrt{x}+C}$

$y = \pm e^{x\sqrt{x} + C} + 1$

$2 = + e^{0\sqrt{0} + C} + 1 = e^{C} + 1$ $\quad 1 = e^{C} \quad C = 0$

$2 = - e^{0\sqrt{0} + C} + 1 = - e^{C} + 1$ $\quad e^{C} = -1 \quad$ bestaat niet

dus $y = e^{x\sqrt{x} + 0} + 1 = e^{x\sqrt{x}} + 1$